Title	スピン-ボソン系と確率過程(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告)
Author(s)	都築, 俊夫
Citation	物性研究 (1994), 62(1): 113-117
Issue Date	1994-04-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95297
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

スピン - ボソン系と確率過程

東北大・理　都築 俊夫

量子論的確率過程、量子雑音の本格的研究は 1950 年代終り頃から始まった。Lax[1], Senitzky[2], Schwinger[3], Feynman と Vernon[4] 等の名前が挙げられる。[1, 2] は Langevin 方程式の方法の量子論版であるが、この時期の達成は Louisell と Walker[5]、Lax[6] の論文で知ることが出来よう。本報告では Langevin 方程式の方法に絞ることにする。

Langevin 方程式の方法は non-Hamiltonian formalism と Hamiltonian formalism に大別される。各々について、少数の文献と特徴、目標を略記すると、

I. non-Hamiltonian formalism

* Lax[6], Kubo[7], $\cdots$, Hasegawa[8], $\cdots$
* relevant variables が正準交換関係を保持し、KMS 過程となるよう乱雑力（のスペクトル分布）を決める。

II. Hamiltonian formalism

* Ford-Kac-Mazur[9], Benguria-Kac[10], Ford-Kac[11], Ford-Lewis-O'Connell[12], $\cdots$
* 反作用場の役割 [13]
* relevant variables は bath variables と可換でない。

注釈すれば、[7] は量子雑音の研究にとって転機となる意義をもつものであり、その指針を、例えば、[8] で具体化している。また [12] は加法的乱雑力の場合の優れて教育的論文である。なお、Mori 理論 [14] は Hamiltonian formalism に属し、量子系への拡張、応用は活発になされてきたが、ここでは割愛する。

今回、スピン - ボソン系について報告を求められている。そのハミルトニアンを

$$H = -\Delta \cdot \sigma_x + \sum_j \omega_j b_j^+ b_j + \frac{1}{2}\sigma_z \cdot u, \qquad u = \sum_j \lambda_j (b_j^+ + b_j), \tag{1}$$

と書くことにする。確率過程を Hamiltonian formalism で調べることになる。そのような研究は 1963 年の Senitzky[15] に遡り、夥しい数の研究がある。とりわけ 1980 年代に巨視的量子系における量子コヒーレンスの研究の簡単化された模型として活発に研究されたことによって我々の理解はかなり前進した。Leggett 他 [16], Grabert 他 [17] による総合報告に研究の達成を見ることが出来る。これらに集積された文献のリストは有用である。

これらの研究の大多数は経路積分法を手段として用いる。ハミルトニアンがボソンに関して 2 次形であるから、経路積分を正確に実行出来るからである。しかしながら結果は極めて複雑で、簡単に内容を理解できる表式ではなかった。詳細な解析を経て、non-interacting blip approx. (NIBA)[16]、又は同じ内容だが independent bounce approx. (IBA)[17] に到る。要するにスピンのひき続く一対の flip-flop 過程を blip 又は bounce と呼び、動的過程をこの素過程の互に独立な連鎖とみなすものである。ありきたりだが、ありうる結果ではあった。

しかしながら、先に指摘した反作用場とその役割という観点に立つと何が分ったか少しも分らない。このもどかしさは何によるか。筆者の知識の不足に確実に依っているだろう。

しかし、(1) で定義されたスピン - ボソン系は古典的対応系を持たないことにもっと多くの理由がある。(1) は加法的乱雑力をもつ量子系ではなく、剰法的乱雑力をもつ量子系である。これはスピンの交換関係の特殊性から来ている。加法的であれば、反作用場は散逸の原因となり、乱雑力と KMS 関係を充すように正しく取り扱えばよい。剰法的であれば、乱雑力だけでも疑似散逸項を与えうる。反作用場は非線形項を与えうる。もしそうであれば、relevant variable としてのスピン変数と乱雑力との非可換性が重要になる。しかもこの非可換性は反作用場が決める。スピン - ボソン系は本質的に非線形な量子論的確率過程を構成する。疑問の由来である [18]。

この観点からスピンーボソン系を調べるため、スピンの反転運動に追随する変位ボソンに移る。変換 $\hat{U} = \exp[\frac{1}{2}\sigma_z \cdot v]$, $v = \sum_j (\lambda_j/\omega_j)(b_j^+ - b_j)$ により

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \hat{U}H\hat{U}^{-1} - E_0 = \tilde{H}_S + \tilde{H}_B \\ &= -\frac{1}{2}\Delta\{e^v \cdot \sigma_+ + e^{-v} \cdot \sigma_-\} + \sum_j \omega_j b_j^+ b_j,\end{aligned} \tag{2}$$

ここで $E_0 = -\sum_j \lambda_j^2/4\omega_j$。新しいハミルトニアンにおいてはスピン反転に伴ってボソンをコヒーレントに放出又は吸収する。$e^v \cdot \sigma_+$の場合スピンが down から up に反転するとき、down に対応する変位ボソンは e^vによって up 変位ボソンに移る。$e^{-v} \cdot \sigma_-$ についても同様の解釈が出来る。なお相互作用スペクトル強度については、この報告では、最も興味を持たれている、いわゆる ohmic な場合

$$\sum_j \lambda_j^2 \delta(\omega_j - \omega) = 2\alpha\omega e^{-\omega/\omega_c} = 2\alpha J(\omega) \tag{3}$$

に限ることにする。αは無次元相互作用強度、ω_cは紫外切断である。(3) の場合、赤外領域のボソンの零点ゆらぎは Debye-Waller 因子に対数発散をもたらす。

我々の処法を次頁に図示した。ボソンの自由運動 $g(t)$ が乱雑力となり、$v_R(t)$ が反作用場である。ボソン系に白色極限$\omega_c/\Delta \to \infty$を課したので反作用場の遅延は消失している。スピン変数と補正された乱雑力$\bar{g}(t)$ との交換関係は白色極限では簡潔であり、以後の計算はこれを用いて行う。これらから得られた$\sigma_z(t)$ に対する dynamical equation が量子論的 Langevin 方程式を与え時間に関する微積分方程式となる。初期条件 $|\uparrow> \exp[-\beta\tilde{H}_B] <\uparrow|$ による$\sigma_z(t)$の平均を $p(t)$ と書くと、繰返し法によるΔ^2の形式級数正確解は [16, 17] と一致する。次に引き続く一対の flip-flop 確率を平均値でおきかえる decoupling 近似を導入すると

$$\dot{p}(t) = -(2\Delta)^2 \cdot \cos\pi\alpha \int_0^t dt' e^{-2\alpha L(t-t')} p(t') \tag{4}$$

$$L(t) = \int_0^\infty dw \frac{J(\omega)}{\omega^2} \cdot \{1 - \cos\omega t\} \cdot \coth\frac{1}{2}\beta\omega$$

となり、NIBA の結果と同一になる。ところが、反作用場 $v_R(t)$ を完全に無視して decouple 近似をしてもやはり (4) となる。即ち、(4) にはスピンの運動によるボソン系の分極が反作用として含まれていないことになる。(4) は、$\alpha < 1/2$ に対して振動減衰を、$\alpha > 1$ に対して減衰を記述するが ($1 > \alpha > 1/2$ では減衰と思われるが明確な解析はない)[16]、ボソン系は自由運動しているから、減衰の機構を理解することは筆者にはむつかしい。反作用場の役割、剰法的乱雑力の作用機構を知りたい。

Langevin approach

Spin-Boson System

Heisenberg Eqs. of Bosons

Heisenberg Eqs. of Spin

$$\dot{\sigma}_z(t) = i\Delta\{e^{v(t)} \cdot \sigma_+(t) - e^{-v(t)} \cdot \sigma_-(t)\}$$

$$\dot{\sigma}_\pm(t) = \pm 2i\Delta \cdot e^{\mp v(t)} \cdot \sigma_z(t)$$

free field + polarization

$$v(t) = g(t) + v_R(t)$$

$$g(t) = \sum_j \frac{\lambda_j}{\omega_j}\{b_j^+ e^{i\omega_j t} - b_j e^{-i\omega_j t}\}$$

$$v_R(t) = i\pi\alpha\{\sigma_z(t) - \sigma_3\}$$

Dynamical Eqs. of Spin

Commutation relations

$$[\sigma_z(t), \bar{g}(t)] = 0, \quad [\sigma_\pm(t), \bar{g}(t)] = \pm 2i\pi\alpha\sigma_\pm(t)$$

$$[g(t), g(t')] = [\bar{g}(t), \bar{g}(t')] = 2i\pi\alpha \cdot \mathrm{sgn}(t - t')$$

$$\bar{g}(t) = g(t) - i\pi\alpha\sigma_3$$

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_x(t) \pm i\sigma_y(t)$$

反作用に関する問題はいくつかの新たな疑問を誘発する。(4)の解 [16] を見ると、コヒーレンスの振動数は赤外発散の断熱繰込み (標準理論) による有効トンネル行列 [19, 16] に比例している。断熱繰込みとはその効果が静的とみなせるゆらぎを繰込む処法であるから、今問題としているスピン - ボソン系の様に、静的なゆらぎに加えて動的なゆらぎも重要である系に単純に応用してよいかという疑問になる。つまるところ、基底状態はどのような状態かという最も基本的問題に到る [20] 。動的補償理論 [20, 21, 22] を提唱している。(1), (2) は反転対称 (IS)

$$[H, \hat{P}] = [\tilde{H}, \hat{P}] = [\hat{U}, \hat{P}] = 0$$

$$\hat{P} \equiv \exp[i\pi \sum_j b_j^+ b_j + i\frac{\pi}{2}(\sigma_x - 1)]$$

であるから、熱力学極限（無限自由度）で相互作用に起因する反転対称性の破れた基底状態 (GS) が存在しうるかという問題である。筆者の主張を、相互作用 (3) の場合に限ってまとめると

1. $\alpha > 0$ なるすべてのαに対して IS-broken 状態がある。
2. 上限α_mが存在して、$\alpha_m > \alpha \geq 0$ に対して IS 状態がある。
3. $\alpha_c < \alpha_m$なる臨界値α_cが存在し、GS は$\alpha_c > \alpha \geq 0$ では IS, $\alpha > \alpha_c$では broken IS である。
4. 秩序度は微視的には有効トンネル行列Δ_{eff}、巨視的にはσ_zの GS 期待値$< \sigma_z >_{GS}$を選ぶことが出来る。
5. 転移は$< \sigma_z >_{GS}$で見れば一次である。しかしΔ_{eff} で見るとΔ_{eff}にとびがあるが、白色極限$\omega_c/\Delta \to \infty$では連続 ($\Delta_{eff} \to 0$) となる。この極限では$\alpha_c \to \alpha_m \to 1/2 + 0$.

標準理論との違いは動的ゆらぎによる動的補償に由来するが、詳しい解説は [22] 。ここで数理物理研究者の仕事を、筆者の知る限りだが、紹介しておく。長距離相互作用をもつ Ising 模型に写映 [23, 24] するものと C^*代数 [25, 26] によるものとがある。前者は IS-broken IS 転移の存在を記述しているが、α_cについてはその存在域を示している。標準理論を支持するものと受け取られている。[26] は [23, 24] を確認すると主張している。しかし [25] は有限温度の平衡状態はすべてのαに対して IS であると結論している。混乱していると言うべきであろう。極く最近 Amann[27] が断熱繰込み法に新しい試みをしている。通常変分試行関数としては IS を保持するものを選らび、その存在限界をさがす。[27] では一般に broken IS な試行関数を許し、最底エネルギー状態を求めた。結果を白色極限について書くと、$\alpha < \alpha_c = 1/2$ では IS, $\alpha > 1/2$ では broken IS である。筆者の結論とよく似ている。しかし本質は同じかどうか分らない。筆者は IS 枝と broken IS 枝を主張しているが、Amann の方法ではこの点を明らかに出来ない (IS-broken 解は$\alpha > \alpha_c$に限られているようにみえる)。

話を戻す。基底状態の研究から分ったことは、一見簡単な系にみえるスピン - ボソン系を単純にスピンを relevant variables に、ボソン系を熱浴とみなすことは良くないということ。Langevin 方程式はσ_z, $\dot{\sigma}_z$, $\tilde{H}_S$, vの 4 変数から出発する必要があろう。試みはあるが [18] 、成果といえるものは未だない。固有値問題が正確に定立されているので、物理量 (例えば$< \sigma_z(t) >$) と時間領域を決めて微視的検討をする方が物理を理解しやすいかも知れない。

筆者の問題提起 [18] により反作用場に注目したいくつかの研究を促した [28-32] 。いずれも反作用場を取り入れて NIBA を改良しようというものである。[32] はこの立場からのひとつの総合報告である。なお、[29] は [25] を受けてコヒーレンスの存続を主張している。基底状態に関する検討で述べたように問題は非常に根深い、もっと本質的な物理像に係わっていると筆者は考えている。

自らの関心の進展に沿って書いた。主観的に過ぎるとの苦言があるかも知れないが御容赦を乞う。

文献

1. E. Lax, Phys. Rev. **109**(1958), 1921.
2. I.R. Senitzky, Phys. Rev. **119**(1960), 670.
3. J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**(1961), 407.
4. R.P. Feynman and F.L. Vernon, Jr., Ann. Phy. **24**(1963), 118.
5. W.H. Louisell and L.R. Walker, Phys. Rev. **137**(1965), B204.
6. E. Lax, Phys. Rev. **145**(1966), 110.
7. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26**(1969), Suppl., 1.
8. H. Hasegawa, J.R. Klauder and M. Lakshmanan, J. Phys. **A18** (1985), L123.
9. G.W. Ford, M. Kac and P. Mazur, J. Math. Phys. **6**(1965), 504.
10. R. Benguria and M. Kac, Phys. Rev. Lett. **46**(1981), 1.
11. G.W. Ford and M. Kac, J. Stat. Phys. **46**(1987), 803.
12. G.W. Ford, J.T. Lewis, R.F. O'Connell, Phys. Rev. **A37** (1988), 4419.
13. J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji, J. Physique **45**(1984), 637.
14. H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33**(1965), 423.
15. I.R. Senitzky, Phys. Rev. **131**(1963), 2827.
16. A.J. Leggett et al., Rev. Mod. Phys. **59**(1987), 1, and references cited therein.
17. H. Grabert et al., Phys. Rep. **168**(1988), 115, and references cited therein.
18. T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. **81**(1989), 770.
19. 例えば、R. Silbey and R.A. Harris, J. Chem. Phys. **80**(1984), 2615.
20. T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. **82**(1989), 917.
21. T. Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. **87**(1992), 569.
22. 都築 俊夫、 物性研究 **58**(1992), 179.
23. H. Spohn and R. Dümcke, J. Stat. Phys. **41**(1985), 389.
24. H. Spohn, Commun. Math. Phys. **123**(1989), 277.
25. F. Fannes, B. Nachtergaele and A. Verbeure, Commun. Math. Phys. **114**(1988), 537.
26. A. Amann, Ann. Phys. **208**(1991), 414.
27. A. Amann, J. Chem. Phys. **96**(1992), 1317.
28. V. Cápek and P. Chvosta, Czech. J. Phys. **B40**(1990), 585.
29. V. Cápek and P. Chvosta, Phys. Rev. **A43**(1991), 2819.
30. D. Vitali and P. Grigolini, Phys. Rev. **A42**(1990), 7091.
31. D. Vitali, L. Bonci, R. Mannella and P. Grigolini, Phys. Rev. **A45**(1992), 2285.
32. P. Grigolini, Intl. J. Mod. Phys. **B6**(1992), 171.